

УДК 66.021.3

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В ПЛОСКОМ МЕЖМЕМБРАННОМ КАНАЛЕ

© В.Л. Головашин, С.В. Ковалев, С.И. Лазарев, К.С. Лазарев

Ключевые слова: межмембранный канал, математическая модель, явление массопереноса.

В работе представлена математическая модель массопереноса в плоском канале при обратном осмосе. Получена система уравнений, решением которой является распределение полей концентраций вещества в межмембранном канале.

### ВВЕДЕНИЕ

При моделировании баромембранных процессов используются различные подходы: на основе уравнения материального баланса, уравнений неравновесной термодинамики, модели черного ящика, совместном решении уравнений гидродинамики и конвективной диффузии [1–3].

В данной работе используется подход, основанный на аналитическом нахождении поля скоростей (решения уравнений Навье-Стокса) и подстановке данного поля скоростей в уравнение конвективной диффузии.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Система стационарных уравнений, описывающих массоперенос в межмембранном канале баромембранной установки, имеет следующий вид:

$$(\partial U / \partial x) + (\partial V / \partial y) = 0; \quad (1)$$

$$(\partial U / \partial \tau) + U(\partial U / \partial x) + V(\partial U / \partial y) = -\rho^{-1}(\partial P / \partial x) + \nu(\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2) \quad (2)$$

$$(\partial V / \partial \tau) + U(\partial V / \partial x) + V(\partial V / \partial y) = -\rho^{-1}(\partial P / \partial y) + \nu(\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2) \quad (3)$$

$$U(\partial C / \partial x) + V(\partial C / \partial y) = D(\partial^2 C / \partial y^2). \quad (4)$$

Граничные условия:

$$U(x, +R) = 0; U(x, -R) = 0; \quad (5)$$

$$K_1 \cdot C(x, R) \cdot V(x, R) = D(\partial C(x, R) / \partial y)$$

$$K_2 \cdot C(x, -R) \cdot V(x, -R) = D(\partial C(x, -R) / \partial y). \quad (6)$$

Коэффициент задержания определяем по формуле из работы [4]:

$$K_{1,2} = 1 - (1 / (1 + ((1 / \gamma) - 1) [1 - \exp(-V(x \pm R) \cdot \gamma \cdot h) / P_0]) \times \exp((-V(x, \pm R) \cdot \delta) / D)); \quad (7)$$

$$\gamma = C_m / C_p. \quad (8)$$

В результате экспериментов были получены аппроксимационные зависимости:

$$C_m = b \cdot C^n \cdot (T / T_0)^m; \quad (9)$$

$$P_0 = k_1 \cdot C^{k_2} \cdot \exp(C \cdot k_3) \cdot \exp(k_4 / T); \quad (10)$$

При экспериментальных исследованиях в качестве модельного использовался водный раствор олова сернокислого марки ХЧ:  $C = 0,5 \text{ кг/м}^3$ .

Данная система решается при следующих допущениях:

- насос обеспечивает постоянство подачи раствора;
- свойства мембран учитываются коэффициентом задержания;
- режим течения жидкости ламинарный  $Re < 2300$ ;
- давление меняется вдоль оси канала.

Из уравнения расхода после несложных преобразований получено выражение для давления по оси канала:

$$P(x) = (P_n \cdot \cosh(a \cdot x) \cdot \sinh(a \cdot L) - \sinh(a \cdot x) \cdot P_n \cdot \cosh(a \cdot L) + \sinh(a \cdot x) \cdot P_k) / \sin(a \cdot L), \quad (11)$$

$$\text{где } a = \sqrt{3R^3 \cdot k \cdot \mu / R^3}.$$

После несложных преобразований получены выражения для продольной и поперечной скоростей потока.

Для продольной скорости:

$$U(x, R) = (1 / 2\mu) \cdot (\partial P(x) / \partial x) (R^2 - y^2), \quad (12)$$

$$\text{где } \mu = \nu \cdot \rho$$

Для поперечной скорости:

Экспериментальные и расчетные данные по удельной производительности, коэффициенту задержания и концентрации ретентата для раствора  $\text{SnSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$ 

Концентрация исходного раствора $C_{\text{исх}}$ , г/л	Рабочее давление $P$ , МПа	Удельная производительность $G_{\text{экс}} \cdot 10^6$ , $\text{м}^3/\text{м}^2 \cdot \text{с}$	Коэффициент задержания, $K_{\text{экс}}$	Удельная производительность $G_{\text{расч}} \cdot 10^6$ , $\text{м}^3/\text{м}^2 \cdot \text{с}$	Средняя концентрация в ретентате $C_{\text{вых}}$ , г/л
0,5	1,5	2,42	0,994	2,70	0,52806451
0,5	2	3,13	0,995	3,60	0,53793946
0,5	3	4,99	0,996	5,40	0,55854076
0,5	4	7,12	0,998	7,20	0,58035165

$$V(x, y) = -(1/R^3/6\mu) \cdot (\partial^2 P(x)/\partial x^2) y^3 + (1/6R\mu) \cdot (6kP(x)\mu + (\partial^2 P(x)/\partial x^2) \cdot R^3) \cdot y \quad (13)$$

Уравнения для продольной и поперечной скорости подставляем в уравнение конвективной диффузии, которое решаем методом конечных разностей с граничными условиями (5), (6):

$$U(x, y) \cdot (\partial C/\partial x) + V(x, y) \cdot (\partial C/\partial y) = D \cdot (\partial^2 C/\partial x^2 + \partial^2 C/\partial y^2) \quad (14)$$

Адекватность представленной математической модели проверялась на экспериментальной обратноосмотической установке рис. 1.

Из расходной емкости 1 через систему вентиляй высокого давления рабочий раствор нагнетался в камеру разделения двухплунжерным насосом 2. Пройдя рабочий разделительный элемент 5, игольчатые вентили 6 и поплавковый ротаметр 7, разделяемый раствор отводился в емкости ретентата 8 и пермеата 9.

Давление в установке контролируется образцовым манометром 3. Для регулирования давления в установке используется электроконтактный манометр 4, который выключает плунжерный насос с помощью электроконтактного реле при повышении давления выше установленного значения. Расход раствора задавался рабочим ходом плунжерного насоса 2. Жидкость, прошедшая в процессе разделения через мембраны, собиралась в емкости 9. Регулировка давления в системе осуществлялась игольчатым вентилем 6.

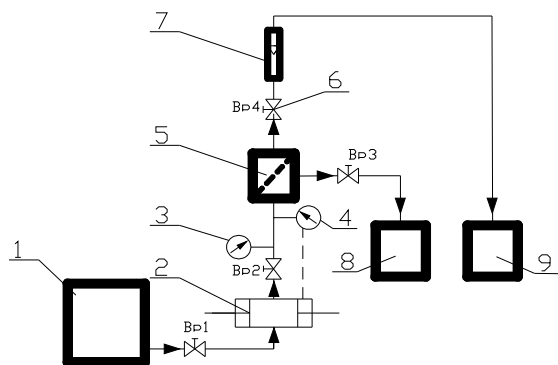


Рис. 1. Схема экспериментальной обратноосмотической установки. 1 – расходная емкость; 2 – плунжерный насос; 3 – манометр; 4 – электроконтактный манометр; 5 – мембранный разделительный элемент; 6 – игольчатый вентиль; 7 – поплавковый ротаметр; 8 – емкость ретентата; 9 – емкость пермеата

После предварительной подготовки мембранного элемента собирали разделительный модуль рулонного типа. Затем разделяемый модуль крепили к установке, показанной на рис. 1. Регулировкой хода плунжера устанавливали заданный расход для обеспечения необходимой скорости в межмембранном канале. Одно временно в рубашку плунжера подавали холодную воду для охлаждения плунжера насоса. Далее при закрытых вентилях 4 включали насос. По мере увеличения рабочего давления проводился холостой опыт в течение 30 мин.

Затем выключали установку, сбрасывали давление в системе. Собранный раствор из емкости 8 сливали в исходную емкость 1 и оставляли установку на несколько часов, с целью выравнивания концентрации исследуемого раствора по всей системе установки. После выдержки оставшийся раствор в установке сливали в емкость 1. Запускали установку, выводили на рабочий режим и проводили контрольный опыт в течение 4 часов для обжатия образцов мембран. После этого проводили рабочий опыт в течение 0,5–4 часов, в зависимости от производительности мембран и необходимого количества собранного пермеата, требуемого для анализа. Время проведения экспериментальных исследований фиксировали секундомером. После рабочего эксперимента сбрасывали давление в системе открытием вентиля 6, и установка отключалась.

Экспериментальные и расчетные данные по удельной производительности, коэффициенту задержания и концентрации ретентата для раствора  $\text{SnSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$  представлены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что отклонение экспериментальных и расчетных данных составляет менее 10 %.

## ВЫВОДЫ

Представлена математическая модель массопереноса в плоском обратноосмотическом канале, позволяющая рассчитывать изменение давления, концентрации, продольной и поперечной скорости в зависимости от длины канала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запранов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика. Справочное пособие. М.: КВАНТУМ, 1996. 336 с.
2. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях / пер с англ. М.: ЭНЕРГИЯ, 1971. 128 с.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.

4. *Полежаев В.И., Буне А.В., Вerezub Н.А. и др.* Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987. 274 с.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$C$  – исходная концентрация раствора, кг/м<sup>3</sup>;  
 $C_m$  – концентрация растворенного вещества в мембране, кг/м<sup>3</sup>;  
 $C_p$  – концентрация растворенного вещества в растворе, кг/м<sup>3</sup>;  
 $C(x(-R); C); C$  – концентрации растворенного вещества у поверхности мембран.  
 $D = 1 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с – коэффициент диффузии в растворе;  
 $h = 1 \cdot 10^{-5}$  м – толщина активного слоя мембраны;  
 $K_1(x), K_2(x)$  – коэффициенты задержания для 1 и 2 мембран;  
 $k = 4 \cdot 10^{-12}$  м/с·Па – коэффициент водопроницаемости;  
 $L = 0,9$  м – длина канала.  
 $P = 4 \cdot 10^6$  Па – давление в конце канала;  
 $P_D$  – коэффициент диффузионной проницаемости, м<sup>2</sup>/с;  
 $R = 0,005$  м – полувисота канала.  
 $T$  – рабочая температура, К;  
 $T_0$  – реперная (принятая как 293 К) температура;  
 $V(x(\pm R)) = 0,5$  м/с – скорость фильтрации;  
 $\gamma$  – равновесный коэффициент распределения;

$\delta = 1 \cdot 10^{-7}$  м – толщина примембранного пограничного диффузионного слоя;  
 $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$  Па·с – коэффициент динамической вязкости;  
 $k_1, k_2, k_3, k_4$  – эмпирические коэффициенты;  
 $b, n, m$  – эмпирические коэффициенты.

Поступила в редакцию 27 сентября 2008 г.

Golovashin V.L., Kovalev S.V., Lazarev S.I., Lazarev K.S. Mathematical modeling of mass transfer in the flat intermembrane channel. The paper presents the mathematical model of mass transfer in the flat channel at the reverse osmosis. The system of equations which decision is distribution of fields of substance concentration in the intermembrane channel is obtained.

Key words: intermembrane channel, mathematical model, mass transfer phenomenon.

## LITERATURE

1. *Kutepov A.M., Polyaniin A.D., Zapryanov Z.D., Vyazmin A.V., Kazenin D.A.* Chemical hydrodynamics. Handbook. М.: KVANTUM, 1996. 336 p.
2. *Patankar S., Spalding D.* Heat and mass exchange in boundary layers / Translation from English М.: ENERGIYA, 1971. 128 p.
3. *Polyaniin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I.* Methods of decision of nonlinear equations in mathematical physics and mechanics. М.: FIZMATLIT, 2005. 256 p.
4. *Polezhaev V.I., Bune A.V., Verezub N.A., etc.* Mathematical modelling of convective heat and mass exchange on the basis of Navier-Stokes' equations. М.: Nauka, 1987. 274 p.